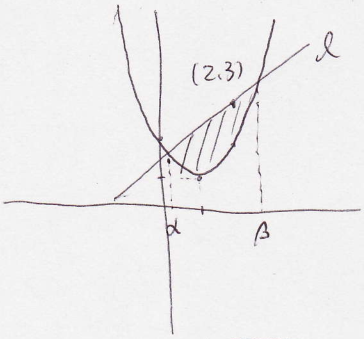
曲線 $y=x^2-2x+2$ と点 $(2, 3)$ を通る直線とで囲まれた図形について, その面積が最小になるような直線の方程式を求めよ。〔金沢大〕

$y=(x-1)^2+1$



求める直線を l とする

l を $y=m(x-2)+3$ とおく($m \neq 0$)

l と $y=x^2-2x+2$ の交点を α, β とする $\alpha<\beta$

このとき α, β を求めると

$x^2-2x+2=m(x-2)+3$

$x^2+(-m-2)x+2m-1=0$

$$x=\frac{m+2\pm\sqrt{(-m-2)^2-4(2m-1)}}{2}=\frac{m+2\pm\sqrt{m^2+4m+4-8m+4}}{2}$$

$$=\frac{m+2\pm\sqrt{m^2-4m+8}}{2}$$

また l と $y=x^2-2x+2$ で囲まれた面積 S は

$S=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ で求められ $\beta-\alpha=\frac{m+2+\sqrt{m^2-4m+8}}{2}-\frac{m+2-\sqrt{m^2-4m+8}}{2}$

$=\sqrt{m^2-4m+8}$ …①

① を S に代入すると

$S=\frac{1}{6}\left(\sqrt{m^2-4m+8}\right)^3$ となり

m^2-4m+8 が最小となる m を求めると S は最小になる。

$(m-2)^2+4$ となり $m=2$ のとき最小となる

よって 求める直線は

$y=2(x-2)+3$

$y=2x-1$