IIB 積分60

a, b, c を実数とし, 関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ とする。任意の整数 n に対して, $\int_0^n f(x)\,dx$ が整数になるとする。次の各問に答えよ。

(1) b, $\frac{2}{3}a+2c$ が整数になることを示せ。

(2) このような関数 $f(x)$ であって, $a=1$ であるものをひとつ求めよ。

〔茨城大〕

(1) $\int_0^n f(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right]_0^n$

$= \frac{1}{3}an^3+\frac{1}{2}bn^2+cn$ …①

①を

$g(n)=\frac{1}{3}an^3+\frac{1}{2}bn^2+cn$ とするとき

$g(1)=\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c$ は整数 …②

$g(-1)=-\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b-c$ も整数 …③

②+③も整数より　b は整数

②−③も整数より　$\frac{2}{3}a+2c$ は整数である

(2)

$a=1$ のとき $\frac{2}{3}+2c$ は整数より　$c=\frac{2}{3}$

b は 2 とすると

$\int_0^n f(x)\,dx=\frac{1}{3}n^3+n^2+\frac{2}{3}n$

$=\frac{1}{3}n(n^2+3n+2)$

$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

となり

$n(n+1)(n+2)$ は連続する3つの整数の積なので

3の倍数を含むので整数となる

よって　条件を満たす $f(x)$ の1つは

$f(x)=x^2+2x+\frac{2}{3}$