※頻出 62

OK

$y=|x(x-2)|$ で与えられる曲線について以下の問いに答えよ。

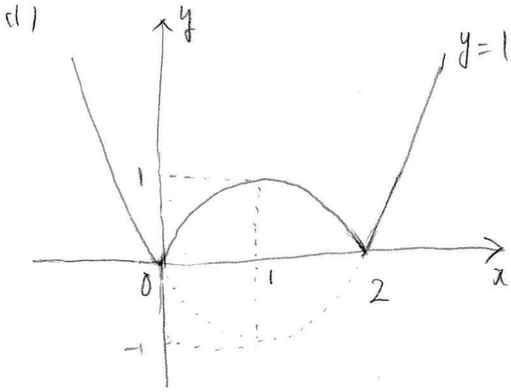
(1) この曲線のグラフを描け。

(2) この曲線と直線 $y=mx$ の共有点の個数を m の値で分類せよ。

(3) (2) の共有点の個数が 3 個のとき, この曲線と直線で囲まれる 2 つの図形のうち原点を含む側の図形の面積を S_1 とし, も一方の面積を S_2 とする。このとき $S_2-S_1=\dfrac{11}{6}$ となるような m の値を求めよ。

〔東北学院大〕

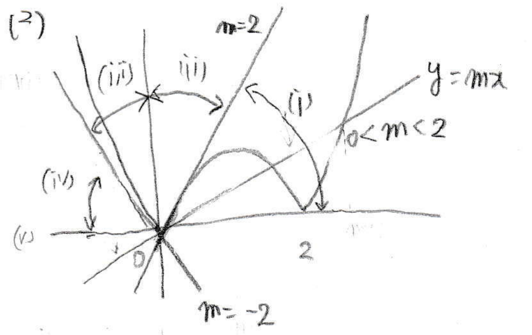
(1)



$y=(x-1)^2-1$

グラフは 左図のよう

(2)



原点を通る直線 $y=mx$ が 放物線 $y=-x^2+2x$ と接するとき $-x^2+2x=mx$ として

$x^2+(m-2)x=0$ これが重解をもつので

判別式 $D=0$ とすると

$(m-2)^2=0$ $\therefore m=2$

また同様に $y=mx$ と $y=x^2-2x$ が接するときは

$m=-2$

これと左図より

i) $0<m<2$ のとき 共有点 3個

ii) $m\geqq 2$ のとき 共有点 2個

iii) $m<-2$ のとき 共有点 2個

iv) $-2\leqq m<0$ のとき 共有点 1個

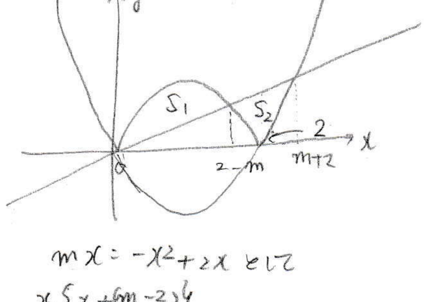
v) $m=0$ のとき 共有点 2個

$$\cancel{S_1=\int_0^{2-m}(-x^2+2x-mx)\,dx=\int_0^{2-m}-x\{x+(2-m)\}\,dx=\frac{1}{6}(2-m)^3}$$

← 不要だった

$x^2-2x=mx$

$x(x-2-m)$



$mx=-x^2+2x$ として

$x\{x+(m-2)\}$

$$S_2=\int_0^{m+2}\{mx-(x^2-2x)\}\,dx+S_1-2\int_0^2-x(x-2)\,dx$$

$$=\int_0^{m+2}-x(x-m-2)\,dx+S_1+2\int_0^2 x(x-2)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(m+2)^3+S_1-\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 2^3 \quad \cdots①$$

①より $S_2-S_1=\dfrac{1}{6}(m+2)^3-\dfrac{8}{3}$ となり $\dfrac{1}{6}(m+2)^3-\dfrac{8}{3}=\dfrac{11}{6}$ より

$\dfrac{1}{6}(m+2)^3=\dfrac{27}{6}$

$\therefore (m+2)^3=27$ $0<m<2$ であるから $\underline{m=1}$