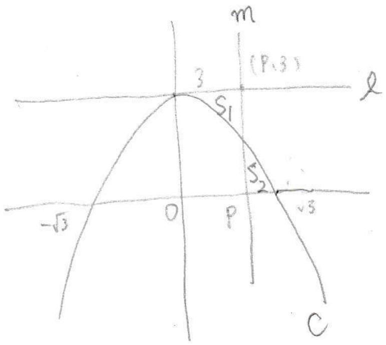
2B
積分 63

ok

xy 平面上に, 曲線 $C : y = -x^2+3$ (ただし, $0 \leqq x \leqq \sqrt{3}$), 直線 $l : y = 3$, 直線 $m : x = p$ (ただし, $0 < p < \sqrt{3}$) がある。C と l と m で囲まれた部分の面積を S_1 とし, C と m と x 軸で囲まれた部分の面積を S_2 とする。このとき,

$$S_1 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}p^3,\ S_2 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}p^3 - \boxed{}\,p + \boxed{}\sqrt{\boxed{}}$$

であり, $S_1 + S_2$ は $p = \dfrac{\sqrt{\boxed{}}}{\boxed{}}$ のとき最小となる。〔千葉工大〕



$S_1 = \int_0^p \{3-(-x^2+3)\}dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^p$

$\therefore\ \underline{S_1 = \frac{1}{3}p^3}$

$y=-x^2+3$ と x 軸との交点は $x=\pm\sqrt{3}$ であるから

$S_2 = \int_p^{\sqrt{3}}(-x^2+3)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+3x\right]_p^{\sqrt{3}}$

$= (-\sqrt{3}+3\sqrt{3}) - (-\frac{1}{3}p^3+3p)$

$\therefore\ \underline{S_2 = \frac{1}{3}p^3 - 3p + 2\sqrt{3}}$

$S_1+S_2 = f(p) = \frac{1}{3}p^3 + \frac{1}{3}p^3 - 3p + 2\sqrt{3}$ となり整理すると

$f(p) = \frac{2}{3}p^3 - 3p + 2\sqrt{3}$

$f'(p) = 2p^2 - 3$　$f'(p)=0$ とおくと　$p = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ($\because p = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ は不適) で

極値をとる これをもとに増減表をかくと、次のようになり

p	0	…	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	…	$\sqrt{3}$
$f'(p)$		$-$	0	$+$	
$f(p)$		↘	極小	↗	

$p=\sqrt{\frac{3}{2}}$ のとき極小かつ最小となる

$\therefore\ \underline{p = \frac{\sqrt{6}}{2}}$ のとき最小