積分 66

放物線 $C : y = x(2-x)$ と C 上の点 $\mathrm{P}(a, a(2-a))$ がある。ただし, $0 < a < 2$ とする。直線 OP と直線 $x = 2$ の交点を Q とするとき, 次の問いに答えよ。O は原点 $(0, 0)$ である。

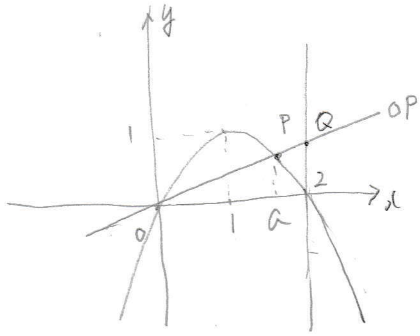
(1) 線分 OP と放物線 C で囲まれた部分の面積 S_1 を求めよ。

(2) 放物線 C, 直線 $x = 2$, および線分 PQ で囲まれた部分の面積 S_2 を求めよ。

(3) (1), (2) で求めた S_1, S_2 に対して, $S_1 + S_2$ が最小となるような a の値を求めよ。

〔大阪電通大〕

(1)



直線OPの式は

$y=(2-a)x$ であり 放物線Cとの交点を求めると

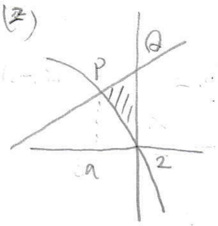
$x(2-x)=(2-a)x$

$x\{2-x-(2-a)\}=0 \rightarrow x(a-x)=0$ となり

交点のx座標は0とaである.

よって $S_1=\int_0^a x(2-x)-(2-a)x\,dx=\int_0^a x(a-x)\,dx=\frac{1}{6}a^3$ $\therefore \underline{S_1=\frac{1}{6}a^3}$

(2)



求める面積S_2は

$$S_2=\int_a^2\{(2-a)x-x(2-x)\}dx$$
$$=\int_a^2(x^2-ax)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right]_a^2$$
$$=\left(\frac{8}{3}-2a\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^3\right)$$
$$=\frac{1}{6}a^3-2a+\frac{8}{3}\quad \therefore \underline{S_2=\frac{1}{6}a^3-2a+\frac{8}{3}}$$

$S_1+S_2=f(a)=\frac{1}{6}a_3+\frac{1}{6}a^3-2a+\frac{8}{3}$ として整理すると

$f(a)=\frac{1}{3}a^3-2a+\frac{8}{3}$

$f'(a)=a^2-2$ $f'(a)=0$ とすると $a=\sqrt{2}$ で $f(a)$ は極値をとる($\because a=-\sqrt{2}$ は不適)

a	0	…	$\sqrt{2}$	…	2
$f'(a)$	/	−	0	+	/
$f(a)$	/	↘	極小	↗	/

増減表をかくと左のようになり

$a=\sqrt{2}$ のとき 極小かつ最小値となる

$\therefore \underline{a=\sqrt{2}}$