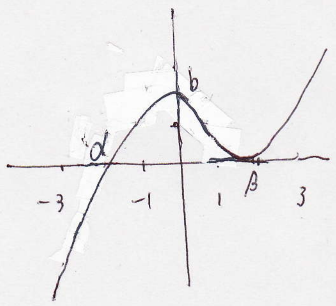
曲線 $y = x^3 - 3ax^2 + b$(a, b は定数) が x 軸と $-3 < x < -1$ の部分で交わり, $1 < x < 3$ の部分で接している。この曲線と x 軸で囲まれる図形の面積の値の範囲を求めよ。

〔大阪府大〕



$y' = 3x^2 - 6ax$

$= 3x(x - 2a)$ より

曲線は $x = 0$ と $x = 2a$ で極値をもつ

また α, β を $y = x^3 - 3ax^2 + b$ と x 軸との交点とすると($\because \alpha < \beta$) β で接することから

$y = (x - 2a)^2(x - \alpha)$ と書ける これを展開すると

$y = (x^2 - 4ax + 4a^2)(x - \alpha)$

$= x^3 - \alpha x^2 - 4ax^2 + 4a\alpha x + 4a^2x - 4a^2\alpha$

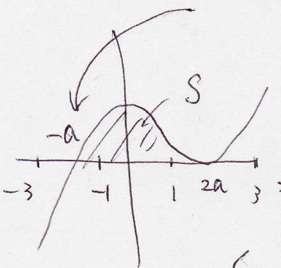
$= x^3 + (-4a - \alpha)x^2 + 4ax(a + \alpha) - 4a^2\alpha$ …①

①と $y = x^3 - 3ax^2 + b$ を係数比較すると

$\alpha = -a$ となり　$b = 4a^3$ となる

従って　$y = (x - 2a)^2(x + a)$ となる.

$x = -a$ は　$-3 < -a < -1$ より　$1 < a < 3$ …②



$x = 2a$ は　$1 < 2a < 3$ より　$\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ …③

②.③ より　$1 < a < \frac{3}{2}$ となる

また面積 S を a を使って表すと

$S = \int_{-a}^{2a} (x^3 - 3ax^2 + 4a^3)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - ax^3 + 4a^3x\right]_{-a}^{2a}$

$= (4a^4 - 8a^4 + 8a^4) - (\frac{1}{4}a^4 + a^4 - 4a^4)$

$= \frac{27}{4}a^4$ ここで $1 < a < \frac{3}{2}$ であるから 面積 S の範囲は

$\frac{27}{4} < S < \frac{2187}{64}$