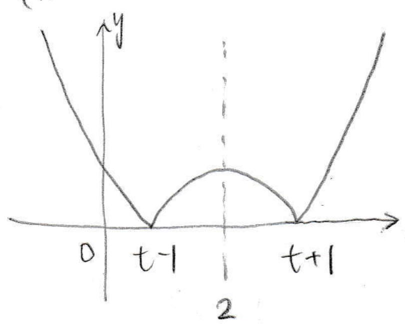
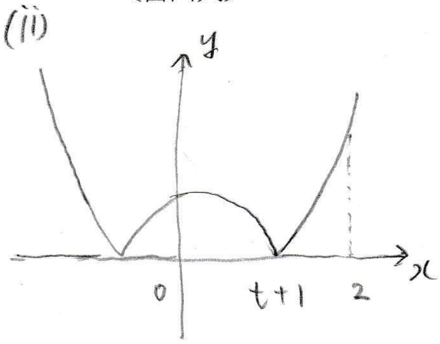
ⅡB 積分 71

関数 $f(t)$ を $f(t)=\int_0^2 \left|(x-t)^2-1\right| dx$ で定義するとき, 区間 $0 \leqq t \leqq 3$ における $f(t)$ の最大値と最小値を求めよ。 〔富山大〕

(i)



(ii)



$(x-t)^2=1$ とすると

$x-t=\pm 1$

$x=t+1,\ t-1$

(i) $0 \leqq t-1 \leqq 2$ のとき

つまり $1 \leqq t \leqq 3$ のとき.

$$f(t)=\int_0^{t-1}\{(x-t)^2-1\}dx+\int_{t-1}^{2}\{-(x-t)^2+1\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-t)^3-x\right]_0^{t-1}+\left[-\frac{1}{3}(x-t)^3+x\right]_{t-1}^{2}$$

$$=-\frac{1}{3}-(t-1)-\left\{-\frac{1}{3}t^3\right\}+\left\{-\frac{1}{3}(2-t)^3+2\right\}-\left\{\frac{1}{3}+(t-1)\right\}$$

$$=-\frac{1}{3}-t+1+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{3}(8-12t+6t^2-t^3)+2-\frac{1}{3}-t+1$$

$$=\frac{2}{3}t^3-2t^2+2t+\frac{2}{3} \qquad f'(t)=2t^2-4t+2$$
$$=2(t-1)^2$$

(ii) $t+1 \leqq 2$ のとき

つまり $t \leqq 1 \rightarrow 0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$f(t)=\int_0^{t+1}\{-(x-t)^2+1\}dx+\int_{t+1}^{2}\{(x-t)^2-1\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}(x-t)^3+x\right]_0^{t+1}+\left[\frac{1}{3}(x-t)^3-x\right]_{t+1}^{2}$$

$$=-\frac{1}{3}+(t+1)-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{3}(2-t)^3-2-\left\{\frac{1}{3}-(t+1)\right\}$$

$$=-\frac{1}{3}+t+1-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{3}(8-12t+6t^2-t^3)-2-\frac{1}{3}+t+1$$

$$=-\frac{2}{3}t^3+2t^2-2t+2 \qquad f'(t)=-2t^2+4t-2$$
$$=-2(t-1)^2$$

(i)(ii) より

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	極小	↗	

(ii) より $f(0)=2$

(i)(ii) より $f(1)=\frac{4}{3}$

(i) より $f(3)=\frac{20}{3}$

より求める値は

$t=3$ のとき最大値 $\frac{20}{3}$

$t=1$ のとき最小値 $\frac{4}{3}$