IIB セキブンク3 ✓

$a$を正の定数とする。次の問いに答えよ。

(1) 半径$a$の球面に内接する円柱の高さを$g$, 底面の半径を$r$とする。$r$を$a$と$g$を用いて表せ。

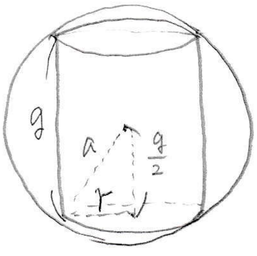
(2) (1)の円柱で, 体積が最大になるときの高さ, およびそのときの底面の半径と体積をそれぞれ$a$を用いて表せ。

(3) 半径$a$の球面に内接する円錐がある。ただし, 円錐の頂点と底面の中心を結ぶ線分は球の中心を通るものとする。円錐の高さを$h$, 底面の半径を$s$とする。$s$を$a$と$h$を用いて表せ。

(4) (3)の円錐で, 体積が最大になるときの高さ, およびそのときの底面の半径と体積をそれぞれ$a$を用いて表せ。

〔長崎大〕

(1)




$r = \sqrt{a^2 - \frac{g^2}{4}}$

(2) 体積を$V$とすると (1)より

$V = \pi r^2 g = \pi\left(a^2 g - \frac{g^3}{4}\right)$

これを$g$の関数として両辺を$g$で微分すると

$V' = \frac{\pi}{4}(4a^2 - 3g^2)$

$3g^2 = 4a^2$ $\quad g = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}a$ $\quad g>0$より

$g = \frac{2}{\sqrt{3}}a$で $V$は極値をとる $\quad g>0$より

| $g$ | 0 | … | $\frac{2}{\sqrt{3}}a$ | … |
|---|---|---|---|---|
| $g'$ | ／ | + | 0 | − |
| $V$ | ／ | ↗ | 極大 | ↘ |

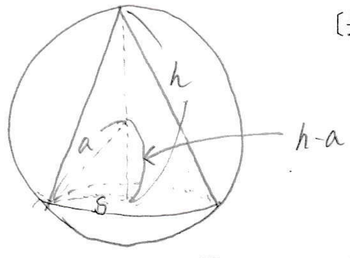
よって $V$は $g = \frac{2}{\sqrt{3}}a$のとき 極大値$\frac{4}{3\sqrt{3}}a^3$

をとる このとき $r = \frac{\sqrt{6}}{3}a$

高さ $\frac{2}{\sqrt{3}}a$ 半径 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ のとき

体積は最大で $\frac{4}{9}\sqrt{3}\pi a^3$

(3)




$s = \sqrt{a^2 - (h-a)^2} = \sqrt{2ah - h^2}$

(4) 円錐の体積を$Ve$とすると

(1)

$Ve = \frac{1}{3}\pi s^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi(2ah^2 - h^3)$

$Ve$を$h$の関数として$h$で微分すると

$Ve' = \frac{1}{3}\pi(4ah - 3h^2)$

$= \frac{1}{3}\pi h(4a - 3h)$ $\quad h\neq 0$より

$h = \frac{4}{3}a$で極大値をとる

| $h$ | 0 | … | $\frac{4}{3}a$ | … |
|---|---|---|---|---|
| $h'$ | ／ | + | 0 | − |
| $Ve$ | ／ | ↗ | 極大 | ↘ |

よって $Ve$は $h = \frac{4}{3}a$で極大値 $\frac{32}{81}a^3$をとる

このとき $s = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$

高さ $\frac{4}{3}a$ 半径 $\frac{2\sqrt{2}}{3}a$ のとき

体積は最大で $\frac{32}{81}\pi a^3$