

(1) 円の中心は点 $(3, \frac{\sqrt{3}}{2})$ における $y = -\frac{1}{6\sqrt{3}}x^2$ の法線の切片になる。

$y' = -\frac{1}{3\sqrt{3}}x$ 点 $(3, \frac{\sqrt{3}}{2})$ における法線の

傾きは $-\sqrt{3}$

よって法線は $y = -\sqrt{3}(x-3) + \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= -\sqrt{3}x + \frac{7\sqrt{3}}{2}$

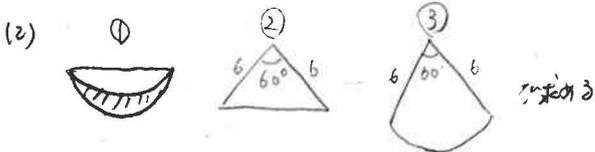
よって求める円の中心は $(0, \frac{7\sqrt{3}}{2})$

このとき半径は

$$\sqrt{(3-0)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{9+27} = 6.$$

よって求める円の方程式は

$$x^2 + (y - \frac{7\sqrt{3}}{2})^2 = 36$$



① $\int_{-3}^3 (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6\sqrt{3}}x^2) dx = 2 [\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{18\sqrt{3}}x^3]_0^3$
 $= 2(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3}})$
 $= 2\sqrt{3}$

② $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$

③ $6 \times 6 \times \pi \times \frac{1}{6} = 6\pi$

よって求める面積は
 $2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 6\pi = 11\sqrt{3} - 6\pi$

$11\sqrt{3} - 6\pi$

中心 $E(t, -\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{2})$ とすると求める円の方程式は
 $(x-t)^2 + (y + \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = t^2$ とおくと
 $(3, \frac{\sqrt{3}}{2})$ を通るので

$$(3-t)^2 + (\sqrt{3}t - 3\sqrt{3})^2 = t^2$$

$$9 - 6t + t^2 + 3t^2 - 18t + 27 = t^2$$

$$3t^2 - 24t + 36 = 0$$

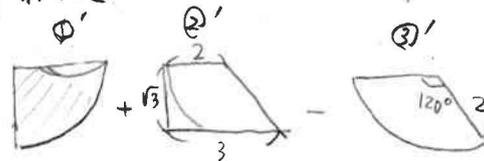
$$t^2 - 8t + 12 = 0$$

$$(t-2)(t-6) = 0 \therefore t = 2, 6$$

よって求める円の方程式は

(i) $(x-2)^2 + (y - \frac{3\sqrt{3}}{2})^2 = 4$, (ii) $(x-6)^2 + (y + \frac{5\sqrt{3}}{2})^2 = 36$

(4) ii) のとき



①' $= \int_0^3 (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{18}x^2) dx$ は (2) の $\frac{1}{2}x$ のところから

①' $= \sqrt{3}$

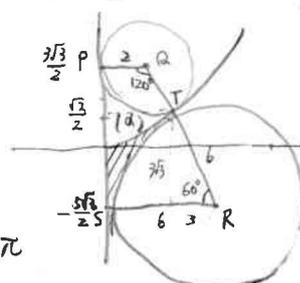
②' は台形 \therefore 求める面積は $(2+3) \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

③' は扇形 \therefore $2 \times 2 \times \pi \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\pi$

よって求める面積は

$$\sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3}\pi = \frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3}\pi \dots (d)$$

iii) のとき



求める面積は台形 PQRS - 扇形 PQT

- (d) - 扇形 RTS

$$= (2+6) \times 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} - 4\pi \times \frac{1}{3}$$

$$- (\frac{2\sqrt{3}}{2} - \frac{4\pi}{3}) - 36\pi \times \frac{1}{6}$$

$$= 16\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{2} - 6\pi$$

$$= \frac{25\sqrt{3}}{2} - 6\pi$$