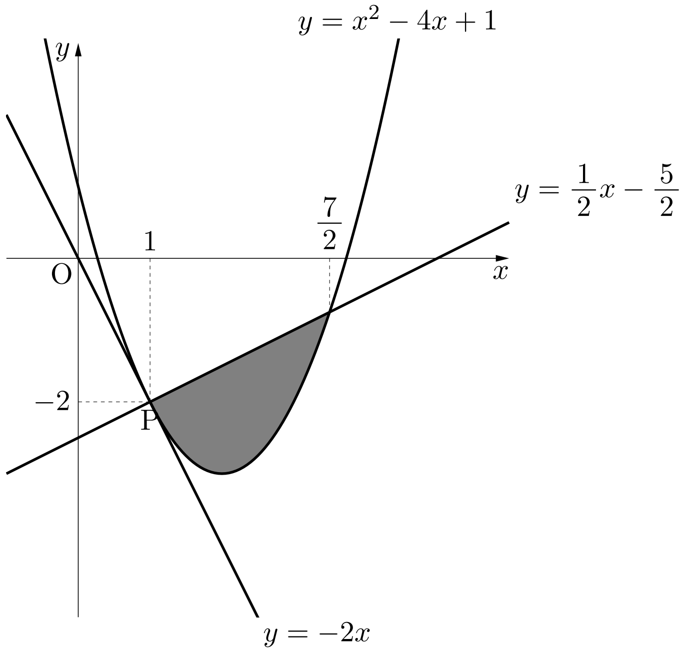
直線 ℓ が点 $\mathrm{P}(1,\,-2)$ において, 曲線 $y=x^2+ax+b$ に接しているものとする。

(1) ℓ が原点を通るとき, 定数 a, b の値を求めよ。

(2) (1) で求めた曲線と, P において ℓ と直交する直線とで囲まれる面積を求めよ。

〔岩手大〕
〔次頁に略解あり〕



(1) $y' = 2x + a$ より,
点 P$(1, -2)$ における接線 ℓ は,
$y = (2 + a)(x - 1) - 2$
$y = (2 + a)x - 4 - a$ となり, これが原点を通ることから,
$a = -4 \cdots ①$
点 P は $y = x^2 + ax + b$ 上の点であることから,
$1 + a + b = -2$
①より,
$1 - 4 + b = -2$
よって, $b = 1$
$a = -4, b = 1$ ……(答)

(2) (1) より, 曲線の式は $y = x^2 - 4x + 1 \cdots ②$, また, 点 P における接線の式は $y = -2x$ である。これに直交する式の傾きは $\frac{1}{2}$ で, これが点 P を通ることから, その式は
$y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \cdots ③$
ここで, ②, ③のグラフの交点の x 座標は
$x^2 - 4x + 1 = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}$ より
$(x - 1)(2x - 7) = 0$ となり,
$x = 1, \frac{7}{2}$
これより求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^{\frac{7}{2}} \left\{ \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \right) - (x^2 - 4x + 1) \right\} dx \\
&= -\int_1^{\frac{7}{2}} (x - 1) \left(x - \frac{7}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{6} \left(\frac{7}{2} - 1 \right)^3 \\
&= \frac{125}{48} \quad \text{……(答)}
\end{aligned}
$$

交点を $\alpha, \beta (\beta > \alpha)$ とするとき,
$S = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ が成り立つ。

〔岩手大〕