指数4

xの方程式$6(9^x+9^{-x})-m(3^x+3^{-x})+2m-8=0$の一つの解が1であるとき，定数$m$の値を求めよ。また，このときの方程式の他の解を求めよ。〔弘前大〕

$3^x+3^{-x}=t$とおくと

$(3^x+3^{-x})^2=9^x+9^{-x}+2$であるから

$9^x+9^{-x}=t^2-2$

これより与式

$6(t^2-2)-mt+2m-8=0$ …①

$x=1$のとき $t=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$ より

$t=\frac{10}{3}$を①に代入すると

$\frac{82}{9} \times 6$

$6\left(\frac{100}{9}-2\right)-\frac{10}{3}m+2m-8=0$

$\frac{164}{3}-\frac{10}{3}m+2m-8=0$

$164-10m+6m-24=0$

$-4m=-140$

$m=35$

$m=35$のとき①は

$6(t^2-2)-35t+62=0$

$6t^2-35t+50=0$

$(3t-10)(2t-5)=0$

$t=\frac{10}{3}, \frac{5}{2}$ となり 他の解は $3^x+3^{-x}=\frac{5}{2}$ を満たすことなり

$2\cdot3^x+2\cdot3^{-x}-5=0$ 両辺に3^xをかけて

$2\cdot(3^x)^2-5\cdot3^x+2=0$ $(3^x-2)(2\cdot3^x-1)=0$ となり

$3^x=2, \frac{1}{2}$ $\therefore$ $x=\pm\log_3 2$

以上より $m=35$、他の解は $x=\pm\log_3 2$