

関数

$$y = 4(4^x + 4^{-x}) - 34(2^x + 2^{-x}) + 81$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $2^x + 2^{-x} = t$ と置くとき、 y を t の式で表せ。
 (2) y の最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

[愛知教育大]

(1) $2^x + 2^{-x} = t > 0$

$$4^x + 4^{-x} = 2^{2x} + 2^{-2x} \text{ である}$$

$(2^x + 2^{-x})^2 = t^2$ を展開して整理すると

$$2^{2x} + 2 + 2^{-2x} = t^2$$

$2^x + 2^{-x} = t$ より $t^2 - 2$ 両辺に t を用いると

$$y = 4(t^2 - 2) - 34t + 81$$

$$y = 4t^2 - 8 - 34t + 81$$

$$y = 4t^2 - 34t + 73$$

$\frac{1}{4}x$

(2)

$$y = 4\left(t^2 - \frac{17}{2}t\right) + 73 \quad t > 0$$

$$= 4\left(t - \frac{17}{4}\right)^2 - \frac{289}{4} + 73$$

$$= 4\left(t - \frac{17}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$t = \frac{17}{4}$ のとき y の最小値 $\frac{3}{4}$ となる

$$2^x + 2^{-x} = \frac{17}{4}$$

$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{17}{4}$$

$$4 \cdot 2^{2x} + 4 - 17 \cdot 2^x = 0$$

$$2^x = k \text{ とおくと}$$

$$4k^2 - 17k + 4 = 0$$

$$(k-4)(4k-1) = 0$$

$$k = 4, \frac{1}{4}$$

$$2^x = 4 \text{ とすると } x = 2$$

$$2^x = \frac{1}{4} \text{ とすると } x = -2$$

よって

$$x = 2, -2 \text{ のとき}$$

$$\underline{\underline{\text{最小値 } \frac{3}{4}}}$$