(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項 $a$, 公比 $r$ とすると

$a_n = a \cdot r^{n-1}$

条件より

$ar = 6$ ← 代入

代入 $ar^4 = 164$ より

$r^3 = 27$ 　 $r = 3$

$3a = 6$

$a = 2$ 　 よって $\underline{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$

(2) $b_1 = S_1 = 2$

$n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
b_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\
&= 2n
\end{aligned}
$$

$n = 1$ のときもこれは成り立つ

よって $\underline{b_n = 2n}$

(3) $n \geqq 2$ のとき 　 $c_1 = 1$

$$
\begin{aligned}
c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1} \\
&= 1 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} \\
&= 3^{n-1}
\end{aligned}
$$

$n = 1$ のときこれは $c_1 = 1$ となり成り立つ

よって $\underline{c_n = 3^{n-1}}$

(4) 求める和を $S$ とすると

$$
\sum_{k=1}^{n} b_k \cdot c_k = \sum_{k=1}^{n} 2k \cdot 3^{k-1}
$$

書き並べると

$$
\begin{array}{rl}
S = & 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 + \cdots + 2n \cdot 3^{n-1} \\
-) \ 3S = & \quad 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 \cdots + 2(n-1) \cdot 3^{n-1} + 2n \cdot 3^n \\
\hline
-2S = & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} - 2n \cdot 3^n
\end{array}
$$

$$
\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{n-1} = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1
$$

$$
\begin{aligned}
-2S &= 3^n - 1 - 2n \cdot 3^n \\
&= 3^n(1 - 2n) - 1
\end{aligned}
$$

$$
\underline{S = \frac{3^n(2n-1) + 1}{2}}
$$