数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0\ (n \geqq 3)$ を満たしている。

(1) $a_n - 2a_{n-1}$ を n を用いて表わせ。

(2) a_n を求めよ。

〔三重大〕

(1) $a_n - 2a_{n-1} = 2(a_{n-1} + 2a_{n-2})$ と変形できる

ここで

$a_n - 2a_{n-1}\ (n \geqq 3)$ は 初項 $a_2 - 2a_1 = 4 - 2 = 2$

公比 2 の等比数列より

$a_n - 2a_{n-1} = 2 \cdot 2^{n-2}$

よって $\underline{a_n - 2a_{n-1} = 2^{n-1}}$

(2) $a_n - 2a_{n-1} = 2^{n-1}$ の両辺を 2^n でわると

$$\frac{a_n}{2^n} - \frac{2a_{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}$$

$\frac{a_n}{2^n}$ は 初項 $\frac{1}{2}$ 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列より

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1)$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n + \frac{1}{2} \cdot 2^n (n-1)$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-1}(n-1)$$

$$= 2^{n-1} + n \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1}$$

よって

$\underline{a_n = n \cdot 2^{n-1}}$