数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1,\ a_2=2,\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\sqrt{\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}(n \geqq 3)$ で与えられるとき, 次の問いに答えよ。

(1) $b_n=\log_2 a_n$ とおいて b_n を n で表わせ。

(2) a_n を求めよ。

〔福岡大〕

(1) $$\log_2 \frac{a_n}{a_{n-1}} = \log_2 \sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$$

$$\log_2 a_n - \log_2 a_{n-1} = \frac{1}{2}(\log_2 a_{n-1} - \log_2 a_{n-2})$$

$b_n = \log_2 a_n$ より

$$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{2}(b_{n-1} - b_{n-2})$$

$b_n - b_{n-1}$ は 初項 $b_2 - b_1 = \log_2 a_2 - \log_2 a_1 = 1 - 0 = 1$

公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であることから

$$b_n - b_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

よって $b_n = 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

(2) $\log_2 a_n = 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ より

$$a_n = 2^{2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$