数列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \frac{5}{32}, \cdots$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。　〔大分大〕

$a_n = \dfrac{n}{2^n}$ （一般項）

初項から第n項の和をSとすると

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^n} \quad \cdots ①$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} \quad \cdots ②$$

①−②より

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}S = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}$$

両辺2倍して

$$S = 2 - \frac{2}{2^n} + \frac{n}{2^n}$$

これより

$$S = 2 - \frac{2+n}{2^n}$$