数列 $\{a_n\}$ が関係式 $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ $(n \geqq 3)$ を満たしている。ここで, $a_1 = 0, a_2 = 2$ である。

(1) a_n を n の式で表わせ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

〔福岡工大〕

特性方程式

$x^2-4x+4=0$ $(x-2)^2=0$ より

$a_n-2a_{n-1}=2(a_{n-1}-2a_{n-2})$

a_n-2a_n は初項 $a_2-2a_1=2$ 公比2の等比数列

$a_n-2a_{n-1}=2\cdot 2^{n-2}=2^{n-1}$

$a_n-2a_{n-1}=2^{n-1}$ の両辺を 2^n でわって

$\dfrac{a_n}{2^n}-\dfrac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=\dfrac{1}{2}$ $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とすると b_n は初項 0 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列より

$\dfrac{a_n}{2^n}=0+\dfrac{1}{2}(n-1)$ これより $a_n=\dfrac{1}{2}\cdot 2^n(n-1)$

よって $a_n=2^{n-1}(n-1)$ //

$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}(k-1)$ とおくと

$$S = 0+1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots (n-1)2^{n-1}$$

$$-)\ 2S = 0 \quad +1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots(n-2)2^{n-1}+(n-1)\cdot 2^n$$

$$-S = 2+2^2+2^3+2^4+\cdots 2^{n-1} -(n-1)\cdot 2^n$$

これより

$$-S=\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n-1)\cdot 2^n$$

$$-S=2^n-2-n\cdot 2^n+2^n$$

$$-S=2\cdot 2^n-n\cdot 2^n-2$$

$$-S=(2-n)2^n-2$$

よって $S=(n-2)2^n+2$ //