18

初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = pn^2 + qn + r$ (p, q, r は定数) で表わされる数列 $\{a_n\}$ が, 等差数列であるための必要十分条件を求めよ。

$S_1 = a_1 = p + q + r$

$$
\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= (pn^2 + qn + r) - \{p(n-1)^2 + q(n-1) + r\} \\
&= pn^2 + qn + r - \{p(n^2 - 2n + 1) + q(n-1) + r\} \\
&= 2pn - p + q \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

より 公差 $2p$ の等差数列
ここで

$a_2 - a_1 = 2p$ となることから

①より

$a_2 = 3p + q$ となるので

$3p + q - (p + q + r) = 2p$

$r = 0$

(別解?) 等差数列は一般に $dn + c$ ($\because d \neq 0$) とおけるので

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} dk + c \\
&= d\frac{1}{2}n(n+1) + cn \\
&= \frac{d}{2}n^2 + \frac{d}{2}n + cn \\
&= \frac{d}{2}n^2 + \left(\frac{d}{2} + c\right)n
\end{aligned}
$$

これと $S_n = pn^2 + qn + r$ と係数比較すると

$r = 0$ となる

これでもよいのかな? (不明)