



等比数列において、初項から第 n 項までの和が 36、初項から第 $2n$ 項までの和が 48 であるとき、初項から第 $3n$ 項までの和を求めなさい。 [大阪薬大]

等比数列の初項 a と公比 r とおき

$$a_n = ar^{n-1}$$

i) $r = 1$ のとき

$$na = 36$$

$$2na = 48 \quad \text{となり } a \text{ は存在しない}$$

ii) $r \neq 1$ のとき

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r} = 36 \quad \text{より} \quad \frac{a}{1-r} = \frac{36}{1-r^n} \quad \dots ①$$

$$\frac{a(1-r^{2n})}{1-r} = 48 \quad \text{より} \quad \frac{a}{1-r} = \frac{48}{1-r^{2n}} \quad \dots ②$$

①、②より $\frac{36}{1-r^n} = \frac{48}{1-r^{2n}}$ 両辺に $1-r^{2n}$ を乗じて整理すると

$$3(1-r^{2n}) = 4(1-r^n)$$

$$3r^{2n} - 4r^n + 1 = 0$$

$$(r^n - 1)(3r^n - 1) = 0 \quad \text{となり } r^n \neq 1 \text{ と仮定すると } r^n = \frac{1}{3}$$

これを①に代入して $\frac{a}{1-r} = \frac{36}{1-\frac{1}{3}} = 54$

よって初項から第 $3n$ 項までの和は

$$\frac{a(1-r^{3n})}{1-r} = \frac{a}{1-r} \{1 - (r^n)^{3n}\}$$

$$= 54 \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{3n}\right\}$$

$$= 54 \left(1 - \frac{1}{27}\right) = 54 - 2 = 52$$

