数列 26

$a_1 = \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = 2n+2 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。また，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} a_k$ を求めよ。

〔広島工大〕

(1) $b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 2$

$b_{n+1} - b_n = 2n+2$ より

$b_{n+1} - b_1 = \displaystyle\sum_{m=1}^{n}(2m+2)$

$b_{n+1} - 2 = 2\displaystyle\sum_{m=1}^{n} m + 2n$

$= 2 \cdot \dfrac{1}{2} n(n+1) + 2n$

$= n^2 + 3n$

$\therefore b_{n+1} = n^2 + 3n + 2$

つまり

$b_n = (n-1)^2 + 3(n-1) - 2$

$= n^2 - 2n + \cancel{1} + 3n - \cancel{3} + \cancel{2}$

$= n^2 + 2n$

$b_n = n^2 + n$ //

$\dfrac{1}{a_n} = n^2 + n$ より $a_n = \dfrac{1}{n^2+n}$ //

(2)

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$

$= \left(1 - \cancel{\dfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\dfrac{1}{2}} - \cancel{\dfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\dfrac{1}{3}} - \cancel{\dfrac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\dfrac{1}{n}} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{n+1}$

$n = 100$ より

$1 - \dfrac{1}{101}$

$= \dfrac{100}{101}$

$\therefore \dfrac{100}{101}$ //