ごうかく！

数列 27

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定め,
数列 $\{b_n\}$ を $b_1=a_1a_2$, $b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定める。

(1) 一般項 a_n を n を用いて表わせ。

(2) 一般項 b_n を n を用いて表わせ。

〔大阪大〕

(1) $\dfrac{1}{a_n}$ は初項 3 公差 1 の等差数列

$$\frac{1}{a_n}=3+(n-1)=n+2$$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{n+2}$$

(2)

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{(n+1)+2}\cdot\frac{1}{(n+2)+2}$$

$$=\frac{1}{(n+3)(n+4)}\quad\cdots①$$

b_n は初項 $\dfrac{1}{12}$ $(\because a_1=\frac{1}{3},\ a_2=\frac{1}{4})$ 2nd ① が b_n の階差数列になる

$$\therefore\ b_n=\frac{1}{12}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

$$=\frac{1}{12}+\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{(n+2)}\cdot\frac{1}{(n+3)}\right\}$$

$$=\frac{1}{12}+\left\{\left(\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{6}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}$$

$$=\frac{n}{3(n+3)}$$ これは $n=1$ のときも成立する

$$\therefore\ b_n=\frac{n}{3(n+3)}$$

ごうかく！ ごうかく！ ごうかく！