数列 $\{a_n\}$ とその初項から第 n 項までの和 S_n について

$$a_1 = 1,\ 4S_n = 3a_n + 9a_{n-1} + 1\ (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

が成り立つとする。 $4(a_1 + a_2) = 3a_2 + 9a_1 + 1$

(1) 数列 $\{a_n - pa_{n-1}\}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ が等比数列になるように定数 p を定めよ。

(2) 一般項 $\{a_n\}$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{a_n}$ を求めよ。

〔福井大〕

(1)

$$4S_n = 3a_n + 9a_{n-1} + 1 \quad \because n \geqq 3$$
$$-)\ 4S_{n-1} = 3a_{n-1} + 9a_{n-2} + 1$$
$$4a_n = 3a_n + 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$ として

特性方程式 $x^2 - 6x + 9 = 0$ を解くと

$(x-3)^2 = 0$ より

$$a_n - 3a_{n-1} = 3\{a_{n-1} - 3a_{n-2}\}$$

$\therefore$ $p = 3$

(2)

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 3\{a_{n+1} - 3a_n\} \text{ より}$$

数列 $a_{n+1} - 3a_n$ は 初項 $a_2 - 3a_1 = 6 - 3 = 3$, 公比 3 の等比数列

$$\left(\begin{array}{l} \because 4(a_1 + a_2) = 3a_2 + 9a_1 + 1 \text{ より} \\ 4a_1 + 4a_2 = 3a_2 + 9a_1 + 1 \\ a_2 = 5a_1 + 1 = 6. \end{array}\right)$$

$\therefore$ $a_{n+1} - 3a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

両辺を 3^n で割り変形すると

$$3 \cdot \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - 3\frac{a_n}{3^n} = 1$$

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \dfrac{a_n}{3^n} = \dfrac{1}{3}$ となり 数列 $\dfrac{a_n}{3^n}$ は公差 $\frac{1}{3}$ の等差数列となる 初項は $\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ $\dfrac{a_n}{3^n} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}(n-1)$ 従って $a_n = 3^{n-1} + 3^{n-1}(n-1) = n \cdot 3^{n-1}$

$$\underline{a_n = n \cdot 3^{n-1}}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3a_n + 9a_{n-1} + 1}{4a_n}\right) \leftarrow S_n = \frac{3a_n + 9a_{n-1} + 1}{4} \text{ より}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4} + \frac{9(n-1)\cdot 3^{n-2}}{4n3^{n-1}} + \frac{1}{4n3^{n-1}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot \cancel{3^n}}{\frac{4}{3}\cdot \cancel{3^n}} + \frac{1}{4n3^{n-1}}\right) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$