数列30

数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たしている。

$$a_1 = 2,\ 3na_{n+1} = (n+1)a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{n}$ とおいて数列 $\{b_n\}$ 漸化式を導き, 一般項 b_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(a_{k+1} - \frac{1}{3}a_k\right)$ を求めよ。

〔徳島大〕

(1) $3na_{n+1} = (n+1)a_n$ より

$3\dfrac{a_{n+1}}{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$　$b_n = \dfrac{a_n}{n}$ より

$3b_{n+1} = b_n$ であるから $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$ …漸化式

∴ b_n は初項 $b_1 = \frac{a_1}{1} = 2$ 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$b_n = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ //

(2)

$\dfrac{a_n}{n} = b_n = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ より　$a_n = 2n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ //

(3)

$$a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n = 2(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)-1} - \frac{1}{3}\cdot 2n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$= 2(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$= 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\left(a_{k+1} - \frac{1}{3}a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{\frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{3}}$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(a_{k+1} - \frac{1}{3}a_k\right) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ //