数列32

次の問いに答えよ。

(1) tの2次方程式$t^2+bt+c=0$は重解αをもつとする。ただし, $\alpha \neq 0$とする。このとき, 定数p, qに対して$x_n=p\alpha^{n-1}+q(n-1)\alpha^{n-2}$ $(n \geqq 1)$で定められる数列$\{x_n\}$は, $x_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n=0$を満たすことを示せ。

(2) $x_1=2, x_2=2, x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=0$ $(n \geqq 1)$を満たす数列$\{x_n\}$の一般項を求めよ。

〔和歌山大〕

(1)

$x_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n$

$=p\alpha^{n+1}+q(n+1)\alpha^n+b\{p\alpha^n+qn\alpha^{n-1}\}+c\{p\alpha^{n-1}+q(n-1)\alpha^{n-2}\}$

$=p(\alpha^{n+1}+b\alpha^n+c\alpha^{n-1})+q\{n\alpha^n+\alpha^n+bn\alpha^{n-1}+c(n-1)\alpha^{n-2}\}$ …①

ここで $t^2+bt+c=(t-\alpha)^2$ より $b=-2\alpha$ $c=\alpha^2$ より ①は

$p(\alpha^{n+1}-2\alpha^{n+1}+\alpha^{n+1})+q\{n\alpha^n+\alpha^n-2n\alpha^n+(n-1)\alpha^n\}$

$=0$

∴ $x_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n=0$ が成り立つ

(2)

$x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=0$

特性方程式 $x^2-4x+2=0$ を解いて $(x-2)^2=0$ $x=2$

∴

$x_{n+2}-2x_{n+1}=2(x_{n+1}-2x_n)$ と変形でき

数列 $x_{n+1}-2x_n$ は 初項 $x_2-2x_1=2-4=-2$ 公比2の等比数列となる

∴ $x_{n+1}-2x_n=-2\cdot 2^{n-1}=-2^n$

両辺 2^{n+1} でわって

$$\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{x_n}{2^n}=-\frac{1}{2}$$

数列 $\frac{x_n}{2^n}$ は初項 $\frac{2}{2}=1$ 公差 $-\frac{1}{2}$ の等差数列だから

$$\frac{x_n}{2^n}=1-\frac{1}{2}(n-1)=-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$$

∴ $x_n=-n\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^{n-1}$