数列33

数列 $\{a_n\}$ において, 初項 $a_1=1$ から第 n 項 a_n までの和を S_n とする。

$$a_{n+1}=9a_n-4S_n$$

が成り立つとき, 次の問いに答えよ。

(1) $a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$ を示せ。

(2) $b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とするとき, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) S_n を n を用いて表わせ。

〔宇都宮大〕

(1) $a_{n+2}=9a_{n+1}-4S_{n+1}$ $\quad 9a_n=a_{n+1}+4S_n$

$9a_{n+1}-4S_{n+1}-6a_{n+1}+a_{n+1}+4S_n$

$=4a_{n+1}-4(S_{n+1}-S_n)$

$=4a_{n+1}-4a_{n+1}$

$=0$ $\quad$ ∴ $a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

(2) $b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とすると $a_n=3^n b_n$ となるので

$a_2=9a_1-4S_1$
$=9a_1-4a_1$
$=5a_1$

$3^{n+2}b_{n+2}-6\cdot3^{n+1}b_{n+1}+9\cdot3^n b_n=0$

$\cancel{3^{n+2}}b_{n+2}-2\cdot\cancel{3^{n+2}}b_{n+1}+\cancel{3^{n+2}}b_n=0$

$b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0 \to x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0$ より

$b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n$ ∴ $b_{n+1}-b_n$ は初項 $\frac{5}{9}-\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ 公比1の

等比数列 ∴ $b_{n+1}-b_n=\frac{2}{9}1^{n-1}=\frac{2}{9}$

∴ b_n は公差 $\frac{2}{9}$ の等差数列で初項は $\frac{1}{3^1}=\frac{1}{3}$

従って $b_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}(n-1)=\frac{2n+1}{9}$ $\qquad$ $b_n=\dfrac{2n+1}{9}$

(3) $\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{2n+1}{9}$ より $\qquad a_n=(2n+1)3^{n-2}$ $(n\geqq1)$

(4) $4S_n=9a_n-a_{n+1}$

$6n+\cancel{3}-2n-\cancel{3}$

$=(2n+1)3^n-\{2(n+1)+1\}3^{n-1}$

$=3(2n+1)3^{n-1}-(2n+3)3^{n-1}$

$=4n\cdot3^{n-1}$ $\qquad$ ∴ $S_n=n\cdot3^{n-1}$ $(n\geqq1)$