数列34

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=2,\ a_2=4,\ a_{n+2}\cdot a_n = 2(a_{n+1})^2\ (n=1,2,3,\cdots)$ で定める。

(1) $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ とおく, $\{b_n\}$ は等比数列であることを示し, 一般項 b_n を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) $a_n > 10^{10}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし, $\log_{10}2 = 0.3010$ とする。

〔愛媛大〕

(1) $a_{n+2}\cdot a_n = 2(a_{n+1})^2$ は

$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 2\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ と変形でき $b_{n+1} = 2b_n$ とおける

∴ 数列 b_n は 初項 $\dfrac{a_2}{a_1} = 2$ 公比2の等比数列である

従って $b_n = 2\cdot 2^{n-1}$ 　　$b_n = 2^n$

(2)

(1)より $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2^n$ より $a_n > 0$ であるから

$\log_2\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \log_2 2^n = n$

$\log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n = n$

数列 $\log_2 a_n$ は 初項 $\log a_1 = 1$ の階差数列で

$\log_2 a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{1}{2}n(n-1)$

$= \dfrac{n^2-n+2}{2}$

∴ $\log_2 a_n = \log_2 2^{\frac{n^2-n+2}{2}}$ 　　$a_n = 2^{\frac{n^2-n+2}{2}}$

(3) $2^{\frac{n^2-n+2}{2}} > 10^{10}$

$\log_{10} 2^{\frac{n^2-n+2}{2}} > \log_{10} 10^{10}$

$\dfrac{n^2-n+2}{2}\log_{10}2 > 10$

$n^2-n+2 > 20 \div \log_{10}2$

$n^2-n+2 > 66.44\cdots$

$n^2-n > 64.44\cdots$

$n(n-1) > 64.44$ 　連続する2数の積がはじめて65をこえるのは 8×9 のとき

よって 最小の n は9である