数列35

数列 $\{a_n\}$ に対して初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とする。p は定数とし，$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し

$$S_n = \frac{n}{3}(2p + a_n)$$

が満たされているものとし，$b_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ とおく，$a_3 = q$ として以下の問いに答えよ。

(1) b_1, b_2, b_3 を p, q を用いて表わせ。

(2) 一般項 b_n を p, q, n を用いて表わせ。

(3) 一般項 a_n を p, q, n を用いて表わせ。

〔東北大〕

(1) $S_1 = a_1 = \frac{1}{3}(2p + a_1)$　　$3a_1 = 2p + a_1$

$2a_1 = 2p$　　$a_1 = p$

$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{2}{3}(2p + a_2)$　　$3a_1 + 3a_2 = 4p + 2a_2$

$3p + 3a_2 = 4p + 2a_2$　　$a_2 = p$　　$a_3 = q$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{4}{3}(2p + a_4)$　∴ $2p + q + a_4 = \frac{4}{3}(2p + a_4)$　　$a_4 = 3q - 2p$

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{5}{3}(2p + a_5)$　　$4q + a_5 = \frac{5}{3}(2p + a_5)$　　$a_5 = 6q - 6p$

これより

$b_1 = a_3 - a_2 = q - p$　　$b_2 = a_4 - a_3 = 2q - 2p$　　$b_3 = a_5 - a_4 = 3q - 3p$

(2) (1)より

$b_n = n(q - p)$　← 帰納的証明略してます ゴメンなさい.

(3)

$a_{n+2} - a_{n+1} = n(q - p)$ より

$a_{n+1} - a_n = (n-1)(q-p) = (q-p)n - (q-p)$

数列 $a_{n+1} - a_n$ は 初項 $a_1 = p$ の階差数列

$$a_n = p + \sum_{k=1}^{n-1}\{(q-p)n - (q-p)\}$$

$$= p + (q-p)\frac{1}{2}(n-1)n - (q-p)(n-1)$$

$$= p + (n-1)(q-p)\left(\frac{1}{2}n - 1\right)$$

∴ $a_n = \frac{1}{2}(n-2)(n-1)(q-p) + p$