数列36

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = -1,\ 2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3a_{n+1} - 2a_n - 1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たすとき, 次の問いに答えよ。

(1) a_2 を求めよ。

(2) $3a_{n+2} - 7a_{n+1} + 2a_n = 0$ を示せ。

(3) $b_n = a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n$ とするとき, $b_{n+1} = 2b_n$ を示せ。

(4) $c_n = a_{n+1} - 2a_n$ とするとき, $c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n$ を示せ。

(5) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

〔山形大〕

(1)

$2a_1 = 3a_2 - 2a_1 - 1$

$3a_2 = 4a_1 + 1 = -4 + 1 = -3$　　∴ $a_2 = -1$

(2)

$2S_n = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$

$-)\ 2S_{n-1} = 3a_n - 2a_{n-1} - 1$

$2a_n = 3a_{n+1} - 5a_n + 2a_{n-1}$　これを整理すると $3a_{n+1} - 7a_n + 2a_{n-1} = 0$

∴ $3a_{n+2} - 7a_{n+1} + 2a_n = 0$

(3) 特性方程式　$3x^2 - 7x + 2 = (3x-1)(x-2) = 0$ より　$3a_{n+2} - 7a_{n+1} + 2a_n = 0$ は

$a_{n+2} - \frac{1}{3}a_{n+1} = 2\left(a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n\right)$

$b_n = a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n$ より　　$b_{n+1} = 2b_n$ となる

(4) (3)と同様に　$3a_{n+2} - 7a_{n+1} + 2a_n = 0$ は

$a_{n+2} - 2a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_{n+1} - 2a_n)$

$c_n = a_{n+1} - 2a_n$ より　　$c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n$ となる

(5) (3)より　$a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n$ は初項 $b_1 = a_2 - \frac{1}{3}a_1 = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

∴ $a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n = -\frac{2}{3}\cdot 2^{n-1} = -\frac{2^n}{3}$　…①

(4)より　$a_{n+1} - 2a_n$ は初項 $c_1 = a_2 - 2a_1 = 1$

∴ $a_{n+1} - 2a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$　…②

①, ②より

$a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n = -\frac{2^n}{3}$

$-)\ a_{n+1} - 2a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\frac{5}{3}a_n = -\frac{2^n}{3} - \frac{1}{3^{n-1}}$

$a_n = -\frac{2^n}{5} - \frac{1}{5\cdot 3^{n-2}}$