数列38

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ について, 以下の問いに答えなさい。

① $a_1 = 1$

② a_{n+1} は, 2点 $(0,\ 1)$, $(a_n,\ 0)$ を通る直線と直線 $y = (n+1)x$ の交点の x 座標である。$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表わせ。

(2) 一般項 $\{a_m\}$ を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を求めよ。

〔福井大〕

(1) 2点 $(0,1)$, $(a_n, 0)$ を通る式は

$y = -\frac{1}{a_n}x + 1$ で $y = (n+1)x$ との交点のx座標 a_{n+1} は

$(n+1)x = -\frac{1}{a_n}x + 1$ 　 $(n+1)a_n x = -x + a_n$

$\{(n+1)a_n + 1\}x = a_n$

$$\therefore\ a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)a_n + 1} \quad \cdots ①$$

(2) (1)の①の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = (n+1) + \frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = n+1$$

$\therefore$ 数列 $\frac{1}{a_n}$ は 初項 1 の階差数列より

$$\frac{1}{a_n} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 1 + \frac{1}{2}(n-1)n + n - 1$$
$$= \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\therefore\ a_n = \frac{2}{n(n+1)}$$

(3)

$$a_n = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = (2 - \cancel{1}) + (\cancel{1} - \cancel{\tfrac{2}{3}}) + (\cancel{\tfrac{2}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{2}}) + \cdots + (\cancel{\tfrac{2}{n}} - \tfrac{2}{n+1})$$
$$= 2 - \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$$

$$\therefore\ \frac{2n}{n+1}$$