2次の整式 $f(x)=x^2+ax+b$ を考える。すべての自然数 n に対して $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)=\dfrac{1}{3}f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。〔北海道大〕

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+ak+b)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+a\sum_{k=1}^{n}k+bn$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{a}{2}n(n+1)+bn$$

∴ 与式は

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{a}{2}n(n+1)+bn\right\}=\frac{1}{3}(n^2+an+b)$$

となり

$$\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)+\frac{a}{2}(n+1)+b=\frac{1}{3}n^2+\frac{a}{3}n+\frac{1}{3}b$$

$$\cancel{\frac{1}{3}n^2}+\frac{1}{2}n+\frac{1}{6}+\frac{a}{2}n+\frac{a}{2}+b=\cancel{\frac{1}{3}n^2}+\frac{a}{3}n+\frac{1}{3}b$$

$$n\left(\frac{a}{6}+\frac{1}{2}\right)+\frac{a}{2}+\frac{2}{3}b+\frac{1}{6}=0$$

$n\neq 0$ より

$$\begin{cases}\dfrac{a}{6}+\dfrac{1}{2}=0 & \cdots\text{①}\\[2mm] \dfrac{a}{2}+\dfrac{2}{3}b+\dfrac{1}{6}=0 & \cdots\text{②}\end{cases}$$

①より $a=-3$ これを②に代入して

$$-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}b+\frac{1}{6}=0$$

$$-9+4b+1=0$$

$$4b=8$$

$$b=2$$

$$\therefore\ f(x)=x^2-3x+2$$