数列40

次の問いに答えよ。

(1) 次をみたす数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示せ。

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} \ (n = 2, 3, \cdots)$$

(2) 次をみたす数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$$b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_n = \sqrt{b_{n+1}b_{n-1}} \ (n = 2, 3, \cdots)$$

(3) 次をみたす数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

$$c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_n = \frac{2c_{n+1}c_{n-1}}{c_{n+1} + c_{n-1}} \ (n = 2, 3, \cdots)$$

〔同志社大〕

(1) $2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$ とし変形すると

$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$ で 2項間の差が等しいことが表せる

よって a_nは等差数列である

(2) $b_n^2 = b_{n+1}b_{n-1}$ とし $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ と変形でき、これは2項間の比が等しいことを意味する。つまり b_nは等比数列である $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{3}{1} = 3$

であり公比は3であるから $b_n = b_1 \cdot 3^{n-1}$ より $\underline{b_n = 3^{n-1}}$

(3) c_nの逆数をとると

$$\frac{1}{c_n} = \frac{c_{n+1} + c_{n-1}}{2c_{n+1}c_{n-1}}$$

$$\frac{2}{c_n} = \frac{1}{c_{n+1}} + \frac{1}{c_{n-1}}$$

$$\frac{1}{c_{n+1}} - \frac{1}{c_n} = \frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_{n-1}}$$ となり

$\frac{1}{c_n}$は等差数列で公差は $\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} = 2 - 1 = 1$

$\therefore \frac{1}{c_n} = 1 + (n-1) = n$

$\therefore \underline{c_n = \frac{1}{n}}$