ごうかく!

数列例

数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ が

$$x_1 = 2,\ y_1 = 1,\ x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} + 1,\ y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} + 1$$

を満たすとする。このとき一般項 x_n と y_n を n で表す式を求めたい。それには

$$x_n + y_n = \boxed{} \cdot \boxed{}^{\,n-1} - \boxed{},\quad x_n - y_n = \left(\boxed{}\right)^{n-1}$$

となることから

$$x_n = \boxed{} \cdot \boxed{}^{\,n-1} + \frac{\left(\boxed{}\right)^{n-1} - \boxed{}}{2},$$

$$y_n = \boxed{} \cdot \boxed{}^{\,n-1} - \frac{\left(\boxed{}\right)^{n-1} + \boxed{}}{2}$$

を得る。　〔徳島文理大〕

$x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} + 1$

$+)\ y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} + 1$

$x_n + y_n = 3x_{n-1} + 3y_{n-1} + 2$

これより

$x_n + y_n = 3(x_{n-1} + y_{n-1}) + 2$　$x_n + y_n = a_n$ とすると

$a_n = 3a_{n-1} + 2$

$(a_n + 1) = 3(a_{n-1} + 1)$ となり

数列 $a_n + 1$ は 初項 4 公比3の等比数列

$\therefore a_n + 1 = 4 \cdot 3^{n-1}$　$\therefore x_n + y_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 1$ //

$x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} + 1$

$-)\ y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} + 1$

$x_n - y_n = -x_{n-1} + y_{n-1}$

これより

$x_n - y_n = -(x_{n-1} - y_{n-1})$

これは 数列 $x_n - y_n$ が 初項 1, 公比 -1 の等比数列で

あることを意味する

$\therefore x_n - y_n = (-1)^{n-1}$ //

$x_n + y_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 1$

$+)\ x_n - y_n = (-1)^{n-1}$

$2x_n = 4 \cdot 3^{n-1} + (-1)^{n-1} - 1$

$\therefore x_n = 2 \cdot 3^{n-1} + \dfrac{(-1)^{n-1} - 1}{2}$ //

$x_n + y_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 1$

$-)\ x_n - y_n = (-1)^{n-1}$

$2y_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 1^{n-1} - 1$

$\therefore y_n = 2 \cdot 3^{n-1} - \dfrac{(-1)^{n-1} + 1}{2}$ //

ごうかく!