関数 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ について, 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減を調べ, そのグラフをかけ。

(2) n を自然数とする。区間 $\{x \mid n \leqq x < n+1\}$ において, 曲線 $y = f(x)$ の上の点で, y 座標が整数であるような点の個数を a_n とする。a_n を n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の階差数列とする。すなわち, $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とする。このとき, $\{b_n\}$ は等差数列であることを示し, その初項と公差を求めよ。

〔静岡大〕

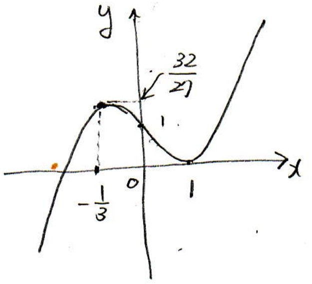
(1) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (x-1)(3x+1)$

増減表は右のようになり

$x = -\frac{1}{3}$ で極大値 $\frac{32}{27}$

$x = 1$ のとき極小値 0 をとる

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗



(2) n は自然数でグラフより $x \geqq 1$ でグラフは単調増加

$\therefore a_n = f(n+1) - f(n)$

$= (n+1)^3 - (n+1)^2 - (n+1) + 1 - (n^3 - n^2 - n + 1)$

$\cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + \cancel{1} - \cancel{n^2} - 2n - 1 - \cancel{n} - 1 + \cancel{1} - \cancel{n^3} + \cancel{n^2} + \cancel{n} - \cancel{1}$

$\therefore a_n = 3n^2 + n - 1$

(3)

$b_n = a_{n+1} - a_n$

$= 3(n+1)^2 + (n+1) - 1 - (3n^2 + n - 1)$

$= \cancel{3n^2} + 6n + 3 + \cancel{n} + 1 - \cancel{1} - \cancel{3n^2} - \cancel{n} + \cancel{1}$

$= 6n + 4$

ここで

$b_{n+1} - b_n = 6(n+1) + 4 - (6n + 4)$

$= \cancel{6n} + 6 + \cancel{4} - \cancel{6n} - \cancel{4}$

$= 6$

以上より b_n は公差6、初項は10