数列43

$a_1=1, a_{n+1}-2a_n=3\cdot 2^n\ (n\geqq 1)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) 第3項 a_3 を求めよ。また $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とするとき, b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ を求めよ。

〔東北学院大〕

(1) $a_2-2a_1=6$ 　　$a_3-2a_2=12$

$a_2-2=6$ 　$a_2=8$ 　　$a_3-16=12$ 　　$\underline{a_3=28}$

与式の両辺を 2^n でわると

$$\frac{a_{n+1}}{2^n}-\frac{a_n}{2^{n-1}}=3 \rightarrow 2\cdot\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-2\cdot\frac{b_n}{2^n}=3$$

となり $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ より 　$2b_{n+1}-2b_n=3$

$$\therefore\ \underline{b_{n+1}-b_n=\frac{3}{2}}$$

(2) b_n は等差数列であるから b_n の一般項は

$b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$ 　よって 　$b_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}(n-1)=\dfrac{3}{2}n-1$

$\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{3}{2}n-1$ 　　$\underline{a_n=2^n\left(\dfrac{3}{2}n-1\right)}$

(3) $a_n=2^{n-1}(3n-2)$ として

$$S_n=1+2^1\cdot 4+2^2\cdot 7+2^3\cdot 10+\cdots 2^{n-2}\cdot(3n-5)+2^{n-1}(3n-2)$$

$$-)\ 2S_n=\qquad 2^1\cdot 1+2^2\cdot 4+2^3\cdot 7+\cdots 2^{n-2}(3n-8)+2^{n-1}(3n-5)+2^n(3n-2)$$

$$-S_n=1+\underline{(2\cdot 3+2^2\cdot 3+2^3\cdot 3+\cdots+2^{n-2}\cdot 3+2^{n-1}\cdot 3)}-2^n(3n-2)$$

上の下線部は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3\cdot 2^{k-1}$ であり その和は $\dfrac{6(2^{n-1}-1)}{2-1}=3\cdot 2^n-6$

$$-S_n=1+3\cdot 2^n-6-2^n(3n-2)$$

$$=1+3\cdot 2^n-6-2^n 3n+2\cdot 2^n$$

$$=-2^n(3n-5)-5$$

$$\therefore\ \underline{S_n=2^n(3n-5)+5}$$