数列44

$a_1=3,\ 4a_{n+1}=12a_n-2\cdot 3^{n-1}n+3^{n-1}\ (n=1,2,3,\cdots)$ で表される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくとき，$b_{n+1}-b_n$ を n の式で表すと $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}n+\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である。

(2) a_n を n の式で表すと $-\dfrac{3^{n-2}}{\boxed{}}\left(n^2-\boxed{}\,n-\boxed{}\right)$ である。

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおくとき，S_n を最大にする n の値の中で最も小さいものは $\boxed{}$ である。

〔慶応大〕

(1) 与式の両辺を 3^{n+1} でわると

$4\cdot\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=4\cdot\dfrac{a_n}{3^n}-\dfrac{2}{9}n+\dfrac{1}{9}$ となり 題意より $4b_{n+1}=4b_n-\dfrac{2}{9}n+\dfrac{1}{9}$

となるので $b_{n+1}-b_n=-\dfrac{1}{18}n+\dfrac{1}{36}$ //

(2) b_n は初項 $b_1=\dfrac{a_1}{3}=1$ の階差数列

$$\therefore\ b_n=1+\sum_{n=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{18}n+\frac{1}{36}\right)$$
$$=1+\left(-\frac{1}{18}\right)\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+\frac{1}{36}(n-1)$$
$$=1-\frac{1}{36}n^2+\frac{1}{36}n+\frac{1}{36}n-\frac{1}{36}$$
$$=-\frac{1}{36}n^2+\frac{1}{18}n+\frac{35}{36}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ より

$$\frac{a_n}{3^n}=-\frac{1}{36}n^2+\frac{1}{18}n+\frac{35}{36}$$
$$a_n=3^n\left(-\frac{1}{36}n^2+\frac{1}{18}n+\frac{35}{36}\right)$$
$$\therefore\ a_n=-\frac{3^{n-2}}{4}(n^2-2n-35)$$ //

(3) $a_n=-\dfrac{3^{n-2}}{4}(n-7)(n+5)$ と変形できる

a_n の符号を考えると
$1\leqq n\leqq 6$ のとき $a_n>0$
$n=7$ のとき $a_n=0$
$n>7$ のとき $a_n<0$

$a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geqq 2)$ より

$a_2=S_2-S_1>0$
$a_3=S_3-S_2>0$
$\vdots$
$a_6=S_6-S_5>0$
$a_7=S_7-S_6=0$
$a_8=S_8-S_7<0$

つまり $S_1<S_2<S_3<S_4<S_5<S_6=S_7>S_8>S_9\cdots$

従って $n=6$