数列47

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \overset{3}{\cancel{2}}a_n + 8^n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ を考える。 いらない

(i) $b_n = \dfrac{a_n}{\square^n}$ とおくと, 数列 $\{b_n\}$ は, $b_{n+1} = \dfrac{\square}{\square} \cancel{\cdot}\, b_n + \dfrac{\square}{\square}$, すなわち

$b_{n+1} - \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}\left(b_n - \dfrac{\square}{\square}\right)$ を満たす。

(ii) $a_n = \dfrac{\square}{\square}\cdot\square^n - \dfrac{\square}{\square}\cdot\square^n$ である。

(2) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 8n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ を考える。

(i) $b_n = a_n + \square n$ とおくと, 数列 $\{b_n\}$ は, $b_{n+1} = \square b_n + \square$ を満たす。

(ii) $a_n = \square\cdot\square^{n-1} - \square n - \square$ である。ただし, (1), (2) における等式は, すべての $n(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して成り立つものとする。

〔東京理科大〕

(1)

(i) 両辺 8^{n+1} でわって

$\dfrac{a_{n+1}}{8^{n+1}} = \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{a_n}{8^n} + \dfrac{1}{8}$ 　 $b_{n+1} = \dfrac{3}{8}b_n + \dfrac{1}{8}$

$x = \dfrac{3}{8}x + \dfrac{1}{8}$ 　 $8x = 3x + 1$ 　 $x = \dfrac{1}{5}$ より

$b_{n+1} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{8}\left(b_n - \dfrac{1}{5}\right)$

(ii) 数列 $b_n - \dfrac{1}{5}$ は初項 $-\dfrac{3}{40}$ 公比 $\dfrac{3}{8}$ の等比数列

$\therefore\ b_n - \dfrac{1}{5} = -\dfrac{3}{40}\left(\dfrac{3}{8}\right)^{n-1}$ 　 $b_n = -\dfrac{3}{40}\left(\dfrac{3}{8}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{5} = -\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{3}{8}\right)^n + \dfrac{1}{5} = \dfrac{a_n}{8^n}$

ゆえに $a_n = \dfrac{1}{5}\cdot 8^n - \dfrac{1}{5}\cdot 3^n$

(2) $x = 3x + 8n$ 　 $-2x = 8n$ 　 $x = -4n$ より 　 $b_n = a_n + 4n$ とおくと

(i) $\underbrace{a_{n+1} + 4(n+1)}_{b_{n+1}} = 3\underbrace{(a_n + 4n)}_{b_n} + 4$ とおけるので $b_{n+1} = 3b_n + 4$

(ii) $x = 3x + 4$ 　 $-2x = 4$ 　 $x = -2$ より 　 $b_{n+1} + 2 = 3(b_n + 2)$

数列 $b_n + 2$ は初項 7 公比 2 の等比数列

$b_n + 2 = 7\cdot 2^{n-1}$

$a_n + 4n + 2 = 7\cdot 2^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 7\cdot 2^{n-1} - 4n - 2$