数列53　ok

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = -2,\ a_{n+1} = 3a_n + 8n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $b_n = a_n + pn + q\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき, 数列 $\{b_n\}$ が等比数列になるように定数 p, q の値を定めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

〔名城大〕

(1) $a_{n+1} + p(n+1) + q = 3(a_n + pn + q)$ とおく

展開して

$a_{n+1} + pn + p + q = 3a_n + 3pn + 3q$

$a_{n+1} = 3a_n + 2pn + 2q - p$ …①

①と与式との比較において

$2pn + 2q - p = 8n$ であることから

$2p = 8$　$2q - p = 0$　$\therefore p = 4$　$q = 2$ となる

(2)

$a_{n+1} + 4(n+1) + 2 = 3(a_n + 4n + 2)$

$b_{n+1} = 3b_n$

b_nは初項 $a_1 + 4 + 2 = 4$ 公比3の等比数列

だから

$b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$

$a_n + 4n + 2 = 4 \cdot 3^{n-1}$ より

$a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 4n - 2$