数73756

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。 $a_{n+1}=2a_n$

$$a_1=10,\ a_{n+1}=(1+r)a_n-x$$

$\dfrac{10(2^9-1)}{2-1}$

ただし, r, x は定数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $r=1,\ x=0$ のとき, 初項から第10項までの和を S とする。S の一万の位の数は $\boxed{}$, 千の位の数は $\boxed{}$, 百の位の数は $\boxed{}$, 十の位の数は $\boxed{}$ である。

(2) $r=1$ のとき, 一般項 a_n は

1024

5120

$$a_n=\boxed{}\times\boxed{}^n+\left(\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\times\boxed{}^n+\boxed{}\right)x$$

で表される。

(3) $r=1$ のとき, $a_5=0$ にするには, $x=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ とすればよい。

(4) $r=\dfrac{1}{10}, x=2$ のとき, $a_n<0$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{}$ である。ただし, $\log_{10}2=0.3010, \log_{10}11=1.0414$ としてよい。

〔上智大〕

(1) $a_{n+1}=2a_n$ ∴ $a_n=10\cdot2^{n-1}$

$S=\dfrac{10(2^{10}-1)}{2-1}=\underline{10230}$ 1万…1 千…0, 百…2, 十…3

(3)

$a_{n+1}=2a_n-x$

$a_2=2a_1-x=20-x$

$a_3=2a_2-x=40-3x$

$a_4=2a_3-x=80-7x$

$a_5=2a_4-x=160-15x$

$160-15x=0$ より

$15x=160$

$x=\dfrac{32}{3}$ //

(2)

$a_{n+1}=2a_n-x$ 特性方程式 $\alpha=2\alpha-x$ を解くと $\alpha=x$

∴ $a_{n+1}-x=2(a_n-x)$ となり 数列 a_n-x は初項 $10-x$ 公比2の等比数列となる

∴ $a_n-x=(10-x)\cdot2^{n-1}$ ゆえに $a_n=(10-x)2^{n-1}+x$

整理して $a_n=5\cdot2^n+\left(\dfrac{-1}{2}\cdot2^n+1\right)x$

(4)

$a_{n+1}=\dfrac{11}{10}a_n-2$

$\alpha=\dfrac{11}{10}\alpha-2$ を解いて $\alpha=20$

∴ $a_{n+1}-20=\dfrac{11}{10}(a_n-20)$ $a_n-20=-10\cdot\left(\dfrac{11}{10}\right)^{n-1}$ より $a_n=-10\cdot\left(\dfrac{11}{10}\right)^{n-1}+20$

$a_n<0$ より $\left(\dfrac{11}{10}\right)^{n-1}>2$ $(n-1)(\log11-1)>\log2$ (∵底は10) より $n>\dfrac{\log2}{\log11-1}+1$ より

$n>8.2\cdots$ よって最小の自然数は9