正の数 a を初項とする公差 3 の等差数列を $a_1, a_2, a_3, \cdots$ とし，$S_n = \dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \dfrac{1}{a_3a_4} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}a_n}$ とする。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，S_n を a と n を用いて表せ。

(3) 100 以上のすべての n に対して $S_n \geqq \dfrac{1}{3a+1}$ が成立する a の最大値を求めよ。

〔千葉大〕

(1) $a_n = a + 3(n-1)$ より $\underline{a_n = 3n + a - 3}$

(2)
$a_1 = a$
$a_2 = a + 3$
$a_3 = a + 6$
$a_4 = a + 9$
$\vdots$
$a_{n-1} = 3n + a - 6$
$a_n = 3n + a - 3$

$3(n-1) + a - 3$

$$S_n = \frac{1}{a(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+6)} + \frac{1}{(a+6)(a+9)} + \cdots \frac{1}{(3n+a-6)(3n+a-3)}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} - \cancel{\frac{1}{a+3}}\right) + \frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{a+3}} - \cancel{\frac{1}{a+6}}\right) + \frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{a+6}} - \cancel{\frac{1}{a+9}}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{3n+a-6}} - \frac{1}{3n+a-3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{3n+a-3}\right)$$

$$= \frac{n-1}{a(3n+a-3)}$$

$\underline{S_n = \dfrac{n-1}{a(3n+a-3)}}$

(3)

$S_{100} \geqq \dfrac{1}{3a+1}$ となるのが条件なので

$$\frac{99}{a(a+297)} \geqq \frac{1}{3a+1}$$

$a(a+297) \leqq 99(3a+1)$

$a^2 + 297a \leqq 297a + 99$

$a^2 \leqq 99$ 　$a > 0$ より $a \leqq 3\sqrt{11}$ 　よって求める a の値は $\underline{3\sqrt{11}}$