数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が，$S_1 = 0$，$S_{n+1} - 3S_n = n^2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たす。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が満たす漸化式を a_n と a_{n+1} の関係式で表せ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

〔徳島大〕

(1) $S_{n+1} - 3S_n = n^2$ より

$n \geqq 2$ のとき $S_n - 3S_{n-1} = (n-1)^2$ であるから

$S_{n+1} - 3S_n = n^2$

$-)\ S_n - 3S_{n-1} = (n-1)^2$

$S_{n+1} - S_n - 3(S_n - S_{n-1}) = n^2 - (n-1)^2$

$a_{n+1} - 3a_n = 2n - 1$

ここで $a_2 - 3a_1 = 1$ で，$a_1 = S_1 = 0$ $S_2 = 1$ より

$a_2 - 3a_1 = 1$ が成り立つ

$\therefore$ $\underline{a_{n+1} - 3a_n = 2n - 1 \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)}$

(2)

$a_{n+1} - 3a_n = 2n - 1$

$a_{n+1} - (pn + q) = 3[a_n - \{p(n-1) + q\}]$ と変形できるので，p, q と

$2n-1$ の係数比較より

$-2pn + 3p - 2q = 2n - 1$ より $p = -1$，$q = -1$ であるから

$a_{n+1} - (-n-1) = 3[a_n - \{-(n-1) - 1\}]$

数列 $a_n - \{-(n-1) - 1\}$ は初項 $a_1 - \{-(1-1) - 1\} = 1$，公比 3 の

等比数列なので

$a_n - \{-(n-1) - 1\} = 3^{n-1}$

$a_n = 3^{n-1} - (n-1) - 1$ となり $\underline{a_n = 3^n - n \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)}$

$a_n = 3^{n-1} - n$ であり $n = 1$ のとき $a_1 = 0$ となる