数列 $\{a_n\}$ が $a_3=7$

$$a_{2k-1}+a_{2k}=8k^2-4k-3 \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

$$a_{2k}+a_{2k+1}=8k^2+4k-3 \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

を満たすとき, 次の問いに答えよ。

(1) $a_1$ を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

〔和歌山大〕

(1) $a_{2k-1}+a_{2k}=8k^2-4k-3$ …①

$a_{2k}+a_{2k+1}=8k^2+4k-3$ …②

①より $k=1$ として

$a_1+a_2=1$ …(a)

②より $k=1$ として

$a_2+a_3=9$

$a_3=7$ より $a_2=2$

$a_2=2$ と (a) より

$a_1=-1$　　$\therefore \underline{a_1=-1}$

(2)

②－① より

$$\begin{array}{rl} a_{2k}+a_{2k+1} &= 8k^2+4k-3 \\ -)\ a_{2k-1}+a_{2k} &= 8k^2-4k-3 \\ \hline a_{2k+1}-a_{2k-1} &= 8k \end{array}$$

$k\geqq 1$ として

$a_{2k-1}=a_1+\sum_{i=1}^{k-1}8i$

$=-1+8\cdot\frac{k(k-1)}{2}$

$=4k^2-4k-1$

$=(2k-1)^2-2$

$2k-1=n$ とおくと

$a_n=n^2-2$　これとき $n=1$ で

$a_1=-1$ となる

$a_{2k-1}+a_{2k}=8k^2-4k-3$ と

先の $a_{2k-1}=4k^2-4k-1$ より

$4k^2-4k-1+a_{2k}=8k^2-4k-3$

$a_{2k}=4k^2-2$

$2k=n$ とおくと

$a_n=n^2-2$　となる

以上より すべての自然数 $n$ に対し

$a_n=n^2-2$　$(n=1,2,3,\cdots)$

となる