$\{a_n\}, \{b_n\}$ を次のように定められた正の数の数列とする。

$$a_1 = 4,\ b_1 = 2,\ a_{n+1} = {a_n}^2 b_n,\ b_{n+1} = a_n {b_n}^2\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) α_n, β_n を

$$\alpha_n = \log_2 a_n,\ \beta_n = \log_2 b_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定めるとき, $\alpha_n + \beta_n$ を $\underline{\$n\$}$ の式で表せ。

(2) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n = \dfrac{2n-1}{4} 3^{n+1} + \dfrac{3}{4}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つことを示せ。

(3) $\log_2 (a_1 {a_2}^2 {a_3}^3 \cdots {a_n}^n)$ を求めよ。

〔三重大〕

(1)
2つ与式の両辺のlogをとると（底は2とする）

$\log a_{n+1} = 2\log a_n + \log b_n$ …①

$\log b_{n+1} = \log a_n + 2\log b_n$ …②

①, ②を加えると

$\log a_{n+1} + \log b_{n+1} = 3(\log a_n + \log b_n)$

$\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = 3(\alpha_n + \beta_n)$ となり

~~数列~~ $\alpha_n + \beta_n$ は初項 $\alpha_1 + \beta_1 = \log_2 a_1 + \log_2 b_1 = 2 + 1 = 3$

公比3の等比数列なので

$\alpha_n + \beta_n = 3 \cdot 3^{n-1}$ $\therefore \alpha_n + \beta_n = 3^n$

(2) $S_n = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n$ とすると

$$\begin{array}{rl} 3S_n = & 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \cdots + (n-1)3^n + n \cdot 3^{n+1} \\ -)\ S_n = & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots\ n \cdot 3^n \\ \hline 2S_n = & -3 - 3^2 - 3^3 - \cdots - 3^n + n \cdot 3^{n+1} \end{array}$$

$= -(3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) + n \cdot 3^{n+1}$

$= -\sum_{k=1}^{n} 3^k + n \cdot 3^{n+1}$

$= -\dfrac{3(3^n - 1)}{3-1} + n \cdot 3^{n+1}$

$= -\dfrac{3(3^n - 1)}{2} + n \cdot 3^{n+1}$

$S_n = \dfrac{-3^{n+1} + 3}{4} + \dfrac{n}{2} \cdot 3^{n+1}$ より $S_n = \dfrac{2n-1}{4} 3^{n+1} + \dfrac{3}{4}$ となるので成り立つ

(3)
(1)の①, ②をひくと

$\log a_{n+1} - \log b_{n+1} = \log a_n - \log b_n$

これは $\alpha_n - \beta_n$ が初項が $\log a_1 - \log b_1 = 1$ で公比1の等比数列を意味するので

$\alpha_n - \beta_n = 1$

これより

$\begin{cases} \alpha_n + \beta_n = 3^n \\ \alpha_n - \beta_n = 1 \end{cases}$

を解いて

$\alpha_n = \dfrac{3^n + 1}{2}$

$\log(a_1 a_2^2 a_3^3 \cdots a_n^n) = \sum_{k=1}^{n} k \log a_k$ …(A)

$\log a_k = \dfrac{3^k + 1}{2} = \log 2^{\frac{3^k+1}{2}}$

$a_k = 2^{\frac{3^k+1}{2}}$ つまり

$\log a_k = \log 2^{\frac{3^k+1}{2}} = \dfrac{3^k + 1}{2}$

よって(A)は

$\dfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (k 3^k + k)$ となるので (2)よりこれは

$\dfrac{1}{2}\left\{ \dfrac{2n-1}{4} 3^{n+1} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} n(n+1) \right\}$ となり

整理すると $\underline{\dfrac{2n-1}{8} \cdot 3^{n+1} + \dfrac{2n^2 + 2n + 3}{8}}$ となる