数列63

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $S_n = \frac{3}{2}a_n - n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をみたす。

(1) a_1 を求めなさい。

(2) a_2 を求めなさい。

(3) 一般項 a_n を求めなさい。

〔大分大〕

(1) $a_1 = S_1$

$a_1 = \frac{3}{2}a_1 - 1$

$-\frac{1}{2}a_1 = -1$ $\underline{a_1 = 2}$

(2) $S_2 = a_1 + a_2$

$a_1 + a_2 = \frac{3}{2}a_2 - 2$

$-\frac{1}{2}a_2 = -4$ $\underline{a_2 = 8}$

(3) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

$S_{n+1} = \frac{3}{2}a_{n+1} - (n+1)$

$-)\ S_n = \frac{3}{2}a_n - n$

$a_{n+1} = \frac{3}{2}a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n - 1$

$-\frac{1}{2}a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n - 1$

$\frac{1}{2}a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + 1$

$a_{n+1} = 3a_n + 2$ …①

$a_{n+1} + \alpha = 3(a_n + \alpha)$ とおくと

$a_{n+1} = 3a_n + 2\alpha$ …②

①=②なので $\alpha = 1$

よって①は

$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$

$b_n = a_n + 1$ とすると

$b_1 = a_1 + 1 = 3$ $b_{n+1} = 3b_n$

b_n は初項3公比3の等比数列

$a_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore \underline{a_n = 3^n - 1}$ これは $n=1$ のときも成り立つ