数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が条件

$$S_n = 4n - 3a_n$$

を満たすとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 初項 a_1 を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) $a_n > \frac{35}{9}$ となる最小の自然数 n を求めよ。ただし, 必要ならば $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ として計算してよい。

〔愛媛大〕

(1) $a_1 = S_1$ より

$S_1 = 4 - 3a_1 \to a_1 = 4 - 3a_1 \quad 4a_1 = 4 \quad \underline{a_1 = 1}$

(2)

$S_{n+1} = 4(n+1) - 3a_{n+1}$

$-)\ S_n = 4n - 3a_n$

$a_{n+1} = 4 - 3a_{n+1} + 3a_n$

$4a_{n+1} = 3a_n + 4$

$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 1 \quad \cdots①$

これが $a_{n+1} + \alpha = \frac{3}{4}(a_n + \alpha)$ と

変形できるとすると

$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n - \frac{1}{4}\alpha$ となり①と比較

すると $-\frac{1}{4}\alpha = 1 \quad \therefore \alpha = -4$

よって $a_{n+1} - 4 = \frac{3}{4}(a_n - 4)$ となり

数列 $a_n - 4$ は初項 $1 - 4 = -3$ 公比 $\frac{3}{4}$ の

等比数列

よって $a_n - 4 = -3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

ゆえに $\underline{a_n = -3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 4}$

(3)

$-3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 4 > \frac{35}{9}$

$-3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} > -\frac{1}{9}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < \frac{1}{27}$

$(n-1)(\log 3 - 2\log 2) < -3\log 3$ (∵底はすべて10)

$(n-1) \cdot -0.125 < -3 \cdot 0.477$

$n - 1 > 1.431 \div 0.125$

$n > 11.448 + 1$

$n > 12.448$

よって $\underline{最小の自然数は13}$