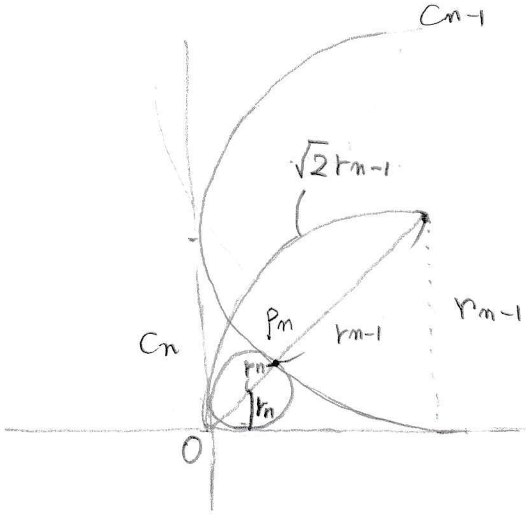
C_1 を, 中心が $(1,\ 1)$, 半径 1 の円とする。円 $C_2,\ C_3,\ C_4,\ \cdots$ を次のように定める。
円 C_n は, x 軸, y 軸および円 C_n の半径 r_n は, 円 C_{n-1} の半径 r_{n-1} よりも小さいものとする。
このとき, 次の問いに答えよ。き, 次の問いに答えよ。

(1) O を原点とし, $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対して P_n を C_n と C_{n-1} の接点とするとき, OP_n の長さを r_n で表せ。

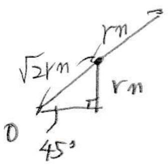
(2) r_n と r_{n-1} の関係を求め, 数列 $\{r_n\}$ が等比数列であることを示せ。

(3) 円 C_6 は, 原点を中心とした半径 $\dfrac{1}{1000}$ の円の内部に含まれることを示せ。

〔香川大〕



(1)
$OP_n = \sqrt{2}r_n + r_n$



$OP_n = (\sqrt{2}+1)r_n$

0.2
0.2

(2) $OP_n = \sqrt{2}r_{n-1} - r_{n-1}$
$= (\sqrt{2}-1)r_{n-1}$

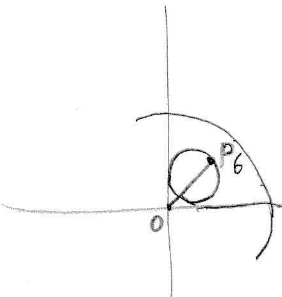
(1)より $(\sqrt{2}+1)r_n = (\sqrt{2}-1)r_{n-1}$

$\therefore\ r_n = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}r_{n-1}$

ゆえに
$r_n = (\sqrt{2}-1)^2 r_{n-1}$

よって r_n は公比 $(\sqrt{2}-1)^2$ の等比数列である

(3) C_6 が原点を中心とした半径 $\dfrac{1}{1000}$ の円の内部にあるということは



$OP_6 < \dfrac{1}{1000}$ を示せばよい。ここで $OP_n = (\sqrt{2}+1)r_n$ は(2)より
r_n は初項 1 公比 $(\sqrt{2}-1)^2$ の等比数列なので $r_n = \{(\sqrt{2}-1)^2\}^{n-1}$
$= (\sqrt{2}-1)^{2(n-1)}$ なので $OP_n = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{2(n-1)}$
$n=6$ とすると

$OP_6 = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{10}$
$= (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^9 = (\sqrt{2}-1)\{(\sqrt{2}-1)^2\}^4 = (\sqrt{2}-1)(3-2\sqrt{2})^4 \cdots ①$
ここで $0.1 < 3-2\sqrt{2} < 0.2,\ 0.4 < \sqrt{2}-1 < 0.5$ なので 左へ

$(\sqrt{2}-1) = 0.5$
$(3-2\sqrt{2}) = 0.2$ とすると ①は
$0.5 \cdot 0.2^4 = 0.0008 > OP_6$
よって $OP_6 < 0.0008 < \dfrac{1}{1000}$ なので題意を示す