数列67

数列 $\{a_n\}$ を次の式で定義する。

$$a_1 = \frac{3}{4},\ a_{n+1} = a_n\left\{1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right\}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $a_1 - \frac{1}{2}, a_2 - \frac{1}{2}, a_3 - \frac{1}{2}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 一般項 $\{a_n\}$ を求めよ。

〔佐賀大〕

(1) $a_1 = \frac{3}{4}$ より

$a_2 = a_1\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9} = \frac{2}{3}$

$a_3 = a_2\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{15}{16} = \frac{5}{8}$

$a_4 = a_3\left(1 - \frac{1}{25}\right) = \frac{5}{8}\cdot\frac{24}{25} = \frac{3}{5}$

(1)

(答) $\begin{cases} a_1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ a_2 - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \\ a_3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{cases}$

(2)

(1) より $a_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(n+1)}$ と予測でき

$a_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2}$

$a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ と予測できる …①

これを数学的帰納法で証明すると

$n=1$ のとき $a_1 = \frac{1+3}{2\cdot(1+1)} = \frac{3}{4}$ で成り立つ

$n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$a_k = \frac{k+2}{2(k+1)}$ が成り立ち

$n=k+1$ のとき 漸化式から

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{2(k+1)}\left\{1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right\}$$

$$= \frac{k+2}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+2)^2 - 1}{2(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2+4k+3}{2(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{\cancel{(k+1)}(k+3)}{2\cancel{(k+1)}(k+2)}$$

$$= \frac{k+3}{2(k+2)} = \frac{(k+1)+2}{2\{(k+1)+1\}}$$

となり、これは $n=k+1$ でも成り立つ

よって $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$