数列68

数列 $\{a_n\}$ が, $a_1=-1$, $2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3a_{n+1}-2a_n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) a_2 を求めよ。

(2) $3a_{n+2}-7a_{n+1}+2a_n=0$ を示せ。

(3) 一般項 a_n を求めよ。

〔類山形大〕

(1) $n=1$ とすると

$2a_1 = 3a_2 - 2a_1 - 1$　　$a_1=-1$ より

$-2 = 3a_2 + 2 - 1$

$-3a_2 = 3$　　$\underline{a_2 = -1}$

(2) $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ という関係を用いる

$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$ なので

$2S_n = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$ …① n を $n+1$ にかえると

$2S_{n+1} = 3a_{n+2} - 2a_{n+1} - 1$ …②

②−①より

$$\begin{array}{rrl} & 2S_{n+1} &= 3a_{n+2} - 2a_{n+1} - 1 \\ -) & 2S_n &= 3a_{n+1} - 2a_n - 1 \\ \hline & 2(S_{n+1}-S_n) &= 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n \end{array}$$

$2a_{n+1} = 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$

よって

$\underline{3a_{n+2} - 7a_{n+1} + 2a_n = 0}$ …③

(3) ③より

$3x^2 - 7x + 2 = 0$ として

$(x-2)(3x-1) = 0$ となるので $x = 2,\ \frac{1}{3}$ を

用いて式変形していく。

ここは答案にかかない。たしかめた後消す。

③を変形すると

$a_{n+2} - 2a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_{n+1} - 2a_n)$

これは $a_{n+1} - 2a_n$ が初項 $a_2 - 2a_1 = 1$

公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列なので

$a_{n+1} - 2a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ …④

また③は

$a_{n+2} - \frac{1}{3}a_{n+1} = 2\left(a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n\right)$

これは $a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n$ が初項 $a_2 - \frac{1}{3}a_1 = -\frac{2}{3}$

公比2の等比数列なので

$a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n = -\frac{2}{3}\cdot 2^{n-1} = -\frac{2^n}{3}$ …⑤

④−⑤より a_{n+1} を消去すると

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1} - 2a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ -) & a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n = -\frac{2^n}{3} \\ \hline & -\frac{5}{3}a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{2^n}{3} \end{array}$$

これより,

$\underline{a_n = -\frac{1}{5}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 2^n\right\}}$