$a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = \frac{1}{3}(8n_{n+1} - 5a_n)(n \geqq 1)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について,

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 孤の数列の初項から第 n 項までの和を S_n とおくとき, S_n を求めよ。

〔国士館大〕

(1) 特性方程式

$$x^2 = \frac{8}{3}x - \frac{5}{3}$$

$3x^2 - 8x + 5 = 0 \quad (3x-5)(x-1) = 0 \quad x = 1,\ \frac{5}{3}$ より

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{5}{3}(a_{n+1} - a_n)$$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ とすると $b_1 = 3 - 2 = 1$.

$b_{n+1} = \frac{5}{3} b_n$ $\quad b_n$ は初項 1, 公比 $\frac{5}{3}$ の等比数列

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$$

よって

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}$$

$$= 2 + \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} - 1}{\frac{5}{3} - 1} = 2 + \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} - 1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

$n=1$ のとき $a_1 = 2$ となり 成り立つ

$$a_n = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

(2)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{2} \right\}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^n - 1\right\}}{\frac{5}{3} - 1} + \frac{1}{2}n$$

$$= \frac{9}{4}\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^n - 1\right\} + \frac{1}{2}n$$

$$S_n = \frac{9}{4}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n + \frac{1}{2}n - \frac{9}{4}$$