数列 $\{a_n\}$ について, 初項から第 n 項までの和 S_n は $S_n=\dfrac{4}{3}n(n+1)(n+2)$ で表わされている。このとき, 次の各々を n の式で表わせ。

(1) $A=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$　　　(2) $B=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k a_k$

〔秋田大〕

$a_n = S_n - S_{n-1}$ より

$$a_n = \frac{4}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{4}{3}(n-1)n(n+1)$$

$$= \frac{4}{3}(n^3+3n^2+2n-n^3+n)$$

$$= \frac{4}{3}(3n^2+3n)$$

$$= 4n^2+4n$$

これより

(1) $$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{n}{4(n+1)}$$

(2) $$B = \sum_{k=1}^{n} 2^k(4k^2+4k)$$

$$B = 4\sum_{k=1}^{n} 2^k\cdot(k^2+k)$$

$$B = 4(2\cdot 2 + 2^2\cdot 6 + 2^3\cdot 12 + 2^4\cdot 20 + \cdots + 2^n(n^2+n))$$

$$-)\ 2B = 4\{2^2\cdot 2 + 2^3+6 + 2^4\cdot 12 + \cdots + 2^n(n^2-n) + 2^{n+1}(n^2+n)\}$$

$$-B = 4\{\underbrace{(2\cdot 2 + 2^2\cdot 4 + 2^3\cdot 6 + 2^4\cdot 8 \cdots + 2^n\cdot 2n)}_{S\text{とおく}} - 2^{n+1}(n^2+n)\}$$

次のページへ

$$S = 2\cdot 2 + 2^2\cdot 4 + 2^3\cdot 6 + 2^4\cdot 8 + \cdots + 2^n\cdot 2n$$

$$-)\ 2S = \qquad 2^2\cdot 2 + 2^3\cdot 4 + 2^4\cdot 6 + \cdots 2^n\cdot 2(n-1) + 2^{n+1}\cdot 2n$$

$$-S = 2\cdot 2 + 2^2\cdot 2 + 2^3\cdot 2 + 2^4\cdot 2 + \cdots 2^n\cdot 2 - 2^{n+1}\cdot 2n$$

$$-S = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots 2^{n+1} - 2^{n+1}\cdot 2n$$

$$= \frac{4(2^n-1)}{2-1} - 2^{n+1}\cdot 2n$$

$$S = -4(2^n-1) + 2^{n+1}\cdot 2n$$

これより $-B$は

$$-B = 4\left[\{-4(2^n-1) + 2^{n+1}\cdot 2n\} - 2^{n+1}(n^2+n)\right]$$

$$= 4\{-2\cdot 2^{n+1} + 4 + 2^{n+1}\cdot 2n - 2^{n+1}(n^2+n)\}$$

$$= 4\{(-n^2+n-2)2^{n+1} + 4\}$$

$$-B = (-n^2+n-2)\cdot 2^{n+3} + 16$$

よって

$$\underline{B = (n^2-n+2)\cdot 2^{n+3} - 16}\ //$$