



数列  $\{a_n\}$  を  $a_1 = 3, a_{k+1} = 4a_k + 3 (k = 1, 2, 3, \dots)$  で定義する。

(1) 一般項  $a_n$  を求めよ。

(2) 和  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\log_2(a_k + 1) \log_2(a_{k+1} + 1)}$  を求めよ。

[東北大]

(1) ~~A~~  $x = 4x + 3 \quad x = -1$

$$a_{k+1} + 1 = 4(a_k + 1)$$

数列  $a_k + 1$  は 初項  $a_1 + 1 = 4$  公比 4 の等比数列と対応する

$$a_n + 1 = 4 \cdot 4^{n-1} \quad \text{よって} \quad \underline{a_n = 4^n - 1}$$

(2) (1より)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\log_2 4^k \cdot \log_2 4^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\log 2^{2k} \log 2^{2(k+1)}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \cdot k \cdot 2(k+1)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{n}{4(n+1)}$$

A  $\frac{n}{4(n+1)}$

